Karlsruher Institut für Technologie

2. Übung Methoden der Signalverarbeitung

Wintersemester 2014/2015

Institut für Industrielle Informationstechnik

Grundlagen

Grundlagen

1. Energiesignale
2. Skalierung
3. Hilbert-Räume

1. Energiesignale

- endliche **Signalenergie**

$$E_x = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$$

- Satz von Parseval →
  Signalenergie über Spektrum

$$E_x = \langle X(f), X(f) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f < \infty$$

1. Energiesignale

Konzentration der Signalenergie:

- mittlere Zeit

$$t_x = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} t \left|x(t)\right|^2 \, \mathrm{d}t$$

- mittlere Frequenz

$$f_x = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} f \left|X(f)\right|^2 \, \mathrm{d}f$$

- Zeitdauer

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_x)^2 \left|x(t)\right|^2 \, \mathrm{d}t$$

- Bandbreite

$$\Delta_f^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_x)^2 \left|X(f)\right|^2 \, \mathrm{d}f$$

2. Skalierung

- Skalierung eines Signals mit dem Faktor a

$$x_a(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_a(f) = a \cdot X(af)$$

- Änderung der Signaleigenschaften:
  - Energie $E_{xa} = |a| \cdot E_x$
  - mittlere Zeit $t_{xa} = a \cdot t_x$
  - Zeitdauer $\Delta_{ta} = a \cdot \Delta_t$
  - mittlere Frequenz $f_{xa} = \frac{1}{a} \cdot f_x$
  - Bandbreite $\Delta_{fa} = \frac{1}{a} \cdot \Delta_f$

3. Hilbert-Räume

- In der Vorlesung häufig Verwendung von **Innenprodukten**
  - elegante Schreibweise
  - Herleitungen können auf verschiedene Signalklassen angewendet werden

- Definition Hilbert-Raum
  - Elemente: „Vektoren“ im erweiterten Sinne
  - Vektoraddition: $\mathbf{x} + \mathbf{y}$
  - skalare Multiplikation: $c \cdot \mathbf{x}$
  - Innenprodukt: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
  - Norm: $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$
  - Metrik $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

3. Hilbert-Räume

- Eigenschaften und Rechenregeln für Innenprodukte

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$$

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$$

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, c^*\mathbf{y} \rangle$$

- Schwartz‘sche Ungleichung

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2$$

3. Hilbert-Räume

Beispiel: komplexe Vektoren

- Elemente: $$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$$
- Innenprodukt: $$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}^*$$
- Norm: $$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}^*} = |\mathbf{x}|$$
- Metrik: $$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$
- Schwarz'sche Ungleichung: $$\left|\mathbf{x}^T \mathbf{y}^*\right|^2 \leq |\mathbf{x}|^2 \cdot |\mathbf{y}|^2$$

3. Hilbert-Räume

Beispiel: Energiesignale

- Elemente: $x(t)$
- Innenprodukt: $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt$
- Norm: $\|x(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt} = \sqrt{E_x}$
- Metrik: $d(x(t), y(t)) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 \, dt} = \sqrt{E_{x-y}}$
- Schwarz‘sche Ungleichung: $\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt \right|^2 \leq E_x \cdot E_y$

Basis

- lin. unabh. Basisvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i$ spannen Hilbert-Raum auf
- Darstellung eines Vektors durch Koeffizienten $\boldsymbol{a}$ im Hilbert-Raum:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i$$

- Berechnung der Koeffizienten durch LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_n \rangle \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_n \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_n \rangle \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G} \text{ (Gram'sche Matrix)}} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Frame

- Vektoren $\boldsymbol{\varphi}_i$ spannen Hilbert-Raum auf
- Darstellung eines Vektors durch Koeffizienten $\boldsymbol{a}$ im Hilbert-Raum:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i$$

- Berechnung der Koeffizienten ohne Invertierung der Gram‘schen Matrix: $a_i = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_i \rangle$
- Frame-Bedingung wird erfüllt:

$$0 < A \cdot \|\mathbf{x}\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leq B \cdot \|\mathbf{x}\|^2 < \infty$$

Aufgaben

Aufgabe 1: Energiesignale

Für die Berechnung der Kenngrößen von Energiesignalen sind folgende Hilfssätze in der Praxis von Nutzen:

a) Zeigen Sie, dass sich jede beliebige reelle Funktion $x(t)$ durch die Summe einer geraden Funktion $x_g(t)$ und einer ungeraden Funktion $x_u(t)$ darstellen lässt.

b) Gegeben ist ein gerades Energiesignal $x(t)$. Zeigen Sie, dass das Signal eine mittlere Zeit $t_x = 0$ besitzt.

c) Gegeben ist ein ungerades Energiesignal $x(t)$. Zeigen Sie, dass das Signal ebenfalls eine mittlere Zeit $t_x = 0$ besitzt.

d) Was ist die Konsequenz aus obigen Aussagen bezüglich der Zerlegung eines Signals $x(t)$ in seinen geraden $x_g(t)$ und in seinen ungeraden $x_u(t)$ Anteil?

e) Gegeben sei ein zeitlich verschobenes Energiesignal $x(t-T)$. Zeigen Sie, dass dessen mittlere Zeit t_x um den Wert $+T$, gegenüber der mittleren Zeit des nicht verschobenen Signals $x(t)$, vergrößert ist.

Aufgabe 2: Exponentialfunktion

Gegeben ist folgendes Signal.

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta|t|}\,, \quad \beta > 0$$

a) Zeichnen Sie das Signal für $\beta = 1$ im Zeit und Frequenzbereich.

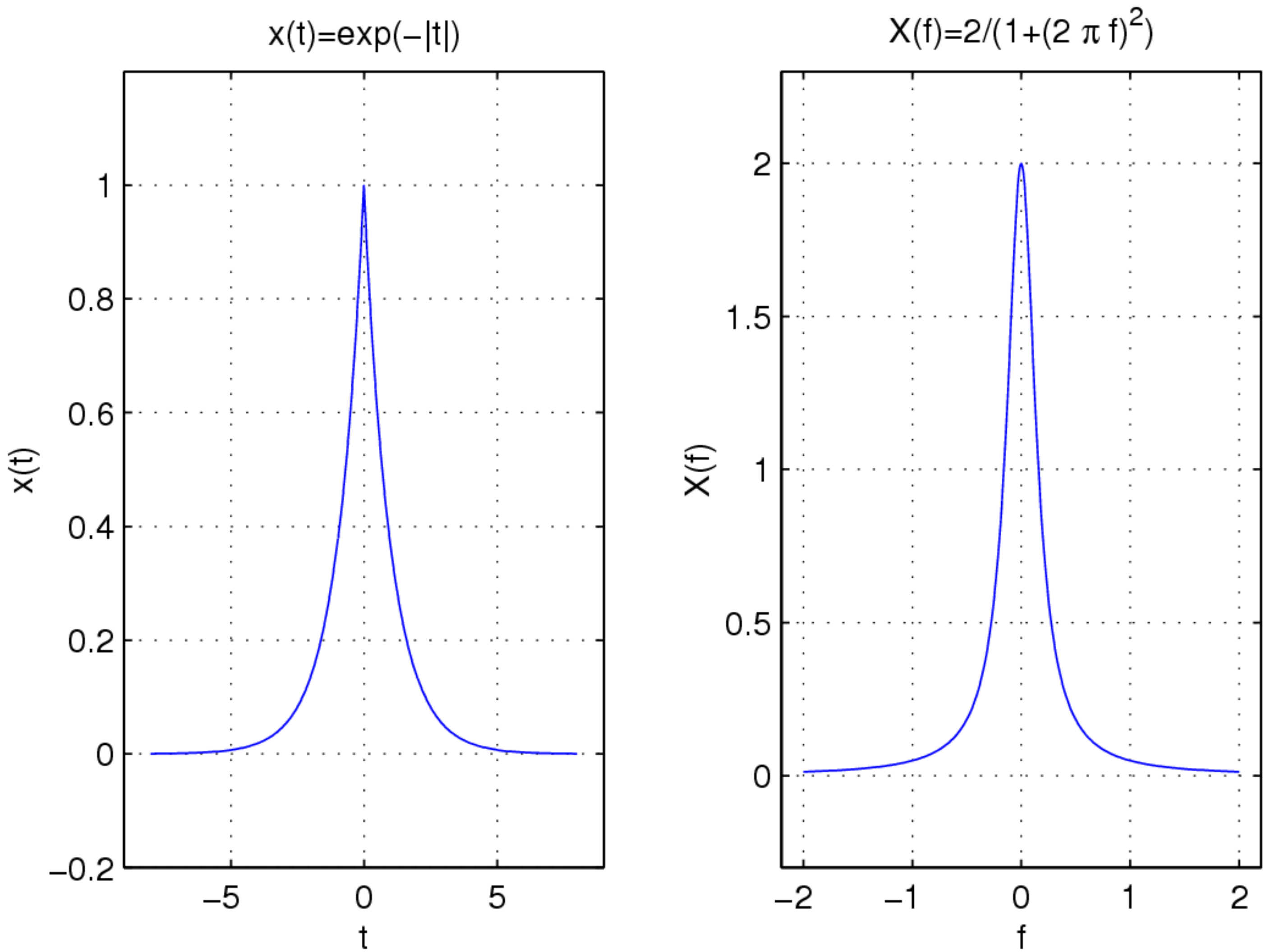
b) Berechnen Sie die Energie E_x des Signals für ein beliebiges β. Handelt es sich um ein Energiesignal?

c) Berechnen Sie die ersten Momente der normierten Energiedichten und stellen Sie fest, in welchem Zeitpunkt t_x bzw. bei welcher Frequenz f_x sich das Signal konzentriert.

d) Bestimmen Sie die Zeitdauer Δ_t und die Bandbreite Δ_f.

e) Berechnen Sie die Unschärfe des Signals und vergleichen Sie diese mit der minimalen Unschärfe nach HEISENBERG.

Aufgabe 2: Exponentialfunktion



Aufgabe 3: Skalierung

Gegeben ist ein periodisches Signal $x(t)$ mit einer Frequenz von $f_0 = \frac{4}{\pi}$.

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

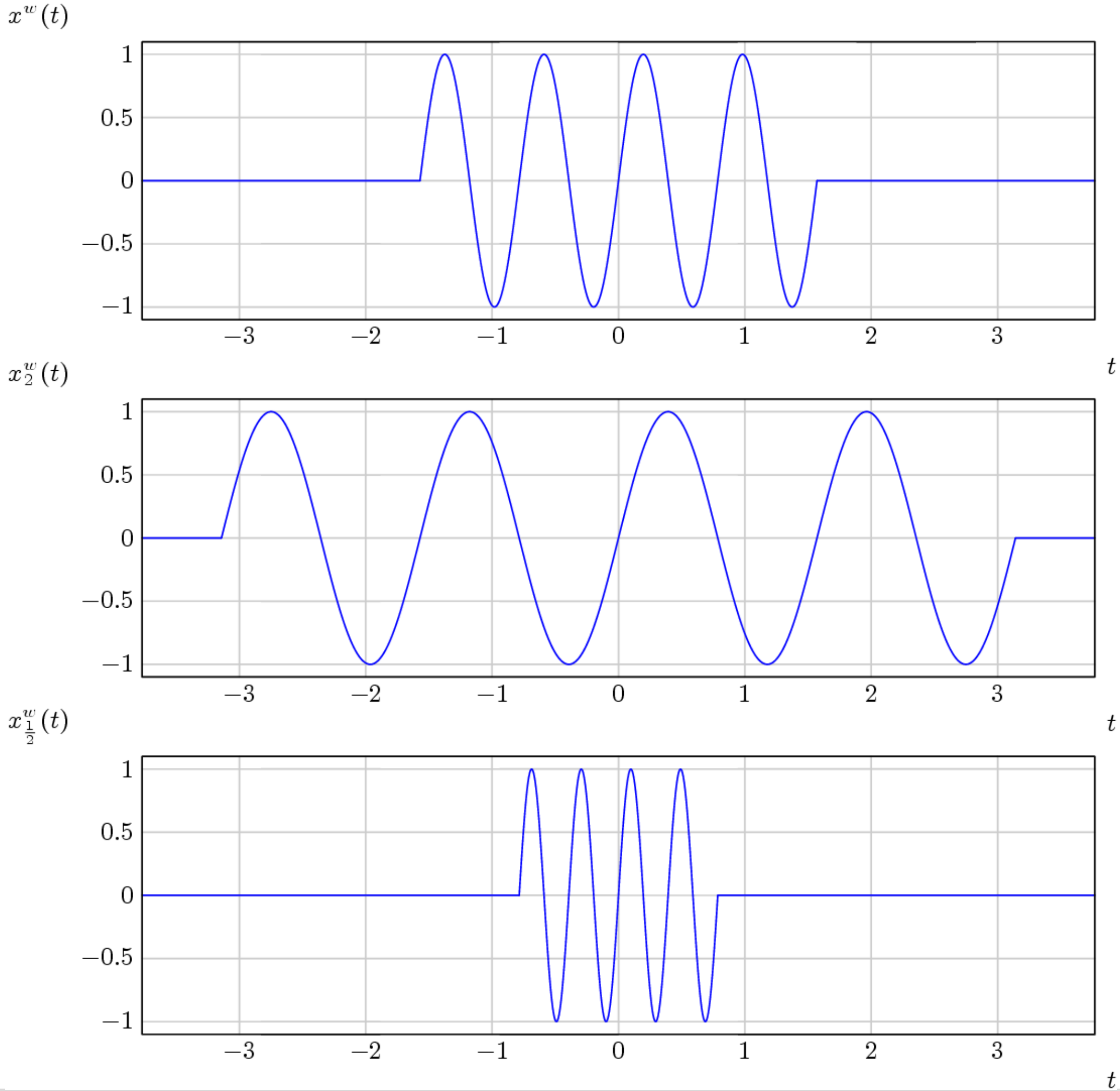
Dieses Signal wird mit einem Rechteckfenster der Länge $T = \pi$ gefenstert. Anschließend wird das gefensterte Signal einmal mit $a_1 = 2$ und mit $a_2 = \frac{1}{2}$ skaliert.

a) Zeichnen Sie das gefensterte Signal $x^w(t)$, sowie die beiden skalierten Signale $x^w_{a_1}(t)$ und $x^w_{a_2}(t)$.

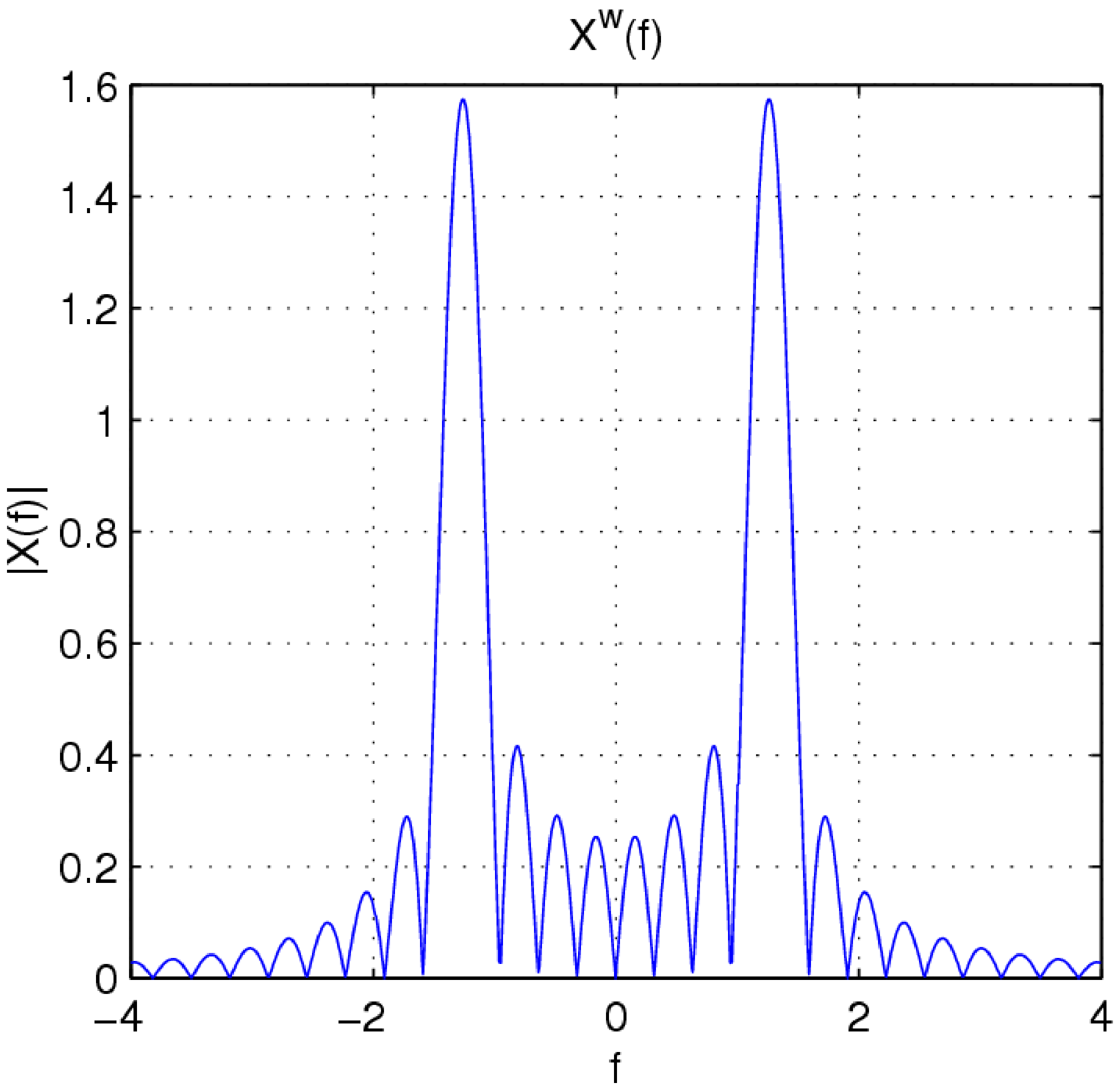
b) Berechnen Sie die Fouriertransformierten der drei Signale $X^w(f)$, $X^w_{a_1}(f)$ und $X^w_{a_2}(f)$. Zeichnen Sie jeweils die Betragsfunktionen.

c) Bestimmen Sie die mittlere Zeit t_x der drei Signale $x^w(t)$, $x^w_{a_1}(t)$ und $x^w_{a_2}(t)$.

Aufgabe 3: Skalierung



Aufgabe 3: Skalierung



Aufgabe 3: Skalierung